

12.1

a) Jonon erotusluku d saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 13 - 7 = 6$$

$$d = a_2 - a_1$$

b) Lasketaan jonon 23. jäsen.

$$a_{23} = 7 + 22 \cdot 6$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

missä $a_1 = 7$, $n = 23$ ja $d = 6$.

$$= 139$$

c) Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 7 + (n-1) \cdot 6$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

missä $a_1 = 7$ ja $d = 6$.

$$= 7 + 6n - 6$$

$$= 6n + 1$$

Vastaus

a) $d = 6$

b) $a_{23} = 139$

c) $a_n = 6n + 1$

12.2

- a) Kun pöytiä on 1, on istumapaikkoja 6.

Aina, kun lisätään yksi pöytä, saadaan 2 istumapaikkaa lisää.

Istumapaikkojen määrät muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 6$ ja erotusluku $d = 2$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 6 + (n-1) \cdot 2 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \\ & & \text{missä } a_1 &= 6 \text{ ja } d = 2. \\ &= 6 + 2n - 2 \\ &= 2n + 4 \end{aligned}$$

Kun pöytiä on n kappaletta, voidaan pöytiin sijoittaa $2n + 4$ vierasta.

- b) Lasketaan jonon 17. jäsen.

$$\begin{aligned} a_{17} &= 2 \cdot 17 + 4 & a_n &= 2n + 4, \text{ missä } n = 17. \\ &= 38 \end{aligned}$$

Kun pöytiä on 17 kappaletta, voidaan pöytiin sijoittaa 38 vierasta.

Vastaus

- a) $2n + 4$

- b) 38

12.3

Muodostetaan ensin jonon yleisen jäsenen lauseke.

Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 42 - 35 = 7$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 35 + (n-1) \cdot 7 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \\ & & \text{missä } a_1 &= 35 \text{ ja } d = 7. \\ &= 7n + 28 \end{aligned}$$

Muodostetaan seuraavaksi yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{aligned} a_n &= 630 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 7n + 28. \\ 7n + 28 &= 630 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &= 86 & \text{Luku 86 kelpaa jäsenen järjestysluvuksi.} \end{aligned}$$

Luku 630 on jonon 86. jäsen: $a_{86} = 7 \cdot 86 + 28 = 630$.

Vastaus

on 86. jäsen

12.4

Muodostetaan ensin jonon yleisen jäsenen lauseke.

Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 30 - 17 = 13$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 17 + (n-1) \cdot 13 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \\ & & \text{missä } a_1 &= 17 \text{ ja } d = 13. \\ &= 13n + 4 \end{aligned}$$

Muodostetaan seuraavaksi yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{aligned} a_n &= 10\,000 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 13n + 4. \\ 13n + 4 &= 10\,000 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &\approx 768,9 \end{aligned}$$

Koska jonon seuraava jäsen saadaan aina edellisestä lisäämällä luku 13, jonon jäsenet suurenevat koko ajan. Täten viimeinen jonon jäsen, joka on pienempi kuin 10 000, on jäsen a_{768} .

Jonon 768 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 10 000.

Vastaus

768 ensimmäistä jäsentä

12.5

- a) Ilmaistaan jäsenet $a_7 = 59$ ja $a_{13} = 179$ ensimmäisen jäsenen a_1 ja erotusluvun d avulla.

$$a_7 = a_1 + 6d$$

Sijoitetaan $a_7 = 59$.

$$59 = a_1 + 6d$$

$$a_{13} = a_1 + 12d$$

Sijoitetaan $a_{13} = 179$.

$$179 = a_1 + 12d$$

Muodostetaan saaduista yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan a_1 ja d .

$$\begin{cases} 59 = a_1 + 6d \\ 179 = a_1 + 12d \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a_1 = -61 \text{ ja } d = 20$$

- b) Lasketaan jonon 45. jäsen.

$$a_{45} = a_1 + 44d$$

Sijoitetaan $a_1 = -61$ ja $d = 20$.

$$= -61 + 44 \cdot 20$$

$$= 819$$

Vastaus

- a) $a_1 = -61$ ja $d = 20$ b) $a_{45} = 819$

12.6

Ensimmäisen viikon juoksumatka on 3,4 km.

Merkitään joka viikko tehtävää juoksumatkan pidennystä kirjaimella d .

Juoksumatkat muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 3,4$ (km) ja erotusluku on d (km).

Jonon kuudes jäsen on $a_6 = 5,4$ (km).

- a)** Ilmaistaan jäsenet $a_6 = 5,4$ ensimmäisen jäsenen $a_1 = 3,4$ ja erotusluvun d avulla. Ratkaistaan yhtälöstä d .

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$5,4 = 3,4 + 5d$$

$$d = 0,4 \text{ (km)}$$

Sijoitetaan $a_6 = 5,4$ ja $a_1 = 3,4$.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Ansku pidentää juoksumatkaa joka viikko 0,4 km.

- b)** Lasketaan jonon 15. jäsen.

$$a_{15} = a_1 + 14d$$

$$= 3,4 + 14 \cdot 0,4$$

$$= 9 \text{ (km)}$$

Sijoitetaan $a_1 = 3,4$ ja $d = 0,4$.

Ansku juoksee 15. viikolla 9 km.

c) Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 3,4 + (n-1) \cdot 0,4$$

$$= 0,4n + 3$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

missä $a_1 = 3,4$ ja $d = 0,4$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 15$$

$$0,4n + 3 = 15$$

$$n = 30$$

Sijoitetaan $a_n = 0,4n + 3$.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Lukujonon 30. jäsen on 15 (km), joten Ansku saavuttaa tavoitteensa 30. viikolla.

Vastaus

a) 0,4 km b) 9 km c) 30. viikolla

12.7

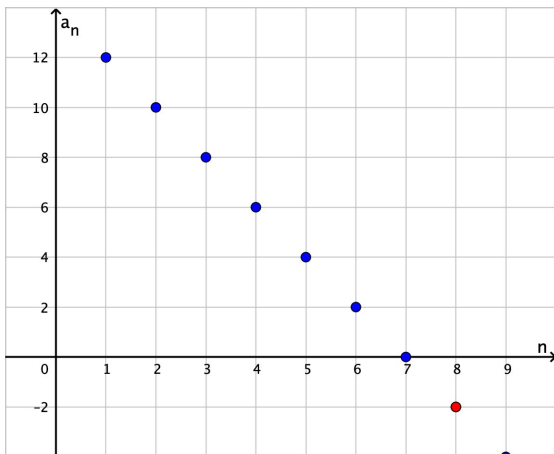
- a) Appletin perusteella lukujonon ensimmäisen jäsenen $a_1 = 12$.

Lukujonon toinen jäsen $a_2 = 10$, joten jonon erotusluku
 $d = 10 - 12 = -2$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 12 + (n-1) \cdot (-2) & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 12 \text{ ja } d = -2. \\ &= 14 - 2n \end{aligned}$$

- b) Appletin perusteella lukujonon 8. jäsen on ensimmäinen negatiivinen jäsen ($a_7 = 0$ ja $a_8 = -2$).



- c) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, kuinka mones lukujonon jäsen on nolla.

$$a_n = 0$$

$$14 - 2n = 0$$

$$n = 7$$

Sijoitetaan $a_n = 14 - 2n$.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Koska lukujonon seuraava jäsen saadaan edellisestä aina vähentämällä luku 2, on seuraava jäsen aina pienempi kuin edellinen. Koska lukujonon 7. jäsen on nolla, on lukujonon 8. jäsen ensimmäinen negatiivinen jäsen.

Vastaus

- a) $a_n = 14 - 2n$ b) 8. jäsen c) 8. jäsen

12.8

Aritmeettisen jonon seuraava jäsen saadaan edellisestä lisäämällä aina sama luku. Toisin sanoen aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten erotus on aina sama luku.

a) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 8 - 4 = 4$$

$$a_3 - a_2 = 12 - 8 = 4$$

$$a_4 - a_3 = 16 - 12 = 4$$

Lukujonon alussa peräkkäisten jäsenten erotus on aina 4, joten lukujono voi olla aritmeettinen.

b) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 12 - 5 = 7$$

$$a_3 - a_2 = 19 - 12 = 7$$

$$a_4 - a_3 = 25 - 19 = 6$$

Lukujonon alussa peräkkäisten jäsenten erotus ei ole aina sama luku, joten lukujono ei voi olla aritmeettinen.

c) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 11 - 6 = 5$$

$$a_3 - a_2 = 6 - 11 = -5$$

$$a_4 - a_3 = 11 - 6 = 5$$

Lukujonon alussa peräkkäisten jäsenten erotus ei ole aina sama luku, joten lukujono ei voi olla aritmeettinen.

d) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 5 - 17 = -12$$

$$a_3 - a_2 = -7 - 5 = -12$$

$$a_4 - a_3 = -19 - (-7) = -12$$

Lukujonon alussa peräkkäisten jäsenten erotus on aina -12 , joten lukujono voi olla aritmeettinen.

e) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 8 - 4 = 4$$

$$a_4 - a_3 = 16 - 8 = 8$$

Lukujonon alussa peräkkäisten jäsenten erotus ei ole aina sama luku, joten lukujono ei voi olla aritmeettinen.

f) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 - a_2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_4 - a_3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Lukujonon alussa peräkkäisten jäsenten erotus on aina $-\frac{1}{2}$, joten lukujono voi olla aritmeettinen.

Vastaus

Aritmeettisia jonoja voivat olla a, d ja f.

12.9

Aritmeettisen jonon seuraava jäsen saadaan edellisestä lisäämällä aina sama luku. Toisin sanoen aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten erotus on aina sama luku.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$(3x+1) - x = (x^2+8) - (3x+1)$$

$$x = 2 \text{ tai } x = 3$$

Sijoitetaan $a_1 = x$, $a_2 = 3x+1$

ja $a_3 = x^2+8$.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Kun $x = 2$, kolme ensimmäistä jäsentä ovat

$$a_1 = x = 2,$$

$$a_2 = 3x+1 = 3 \cdot 2+1 = 7 \text{ ja}$$

$$a_3 = x^2+8 = 2^2+8 = 12.$$

Kun $x = 3$, kolme ensimmäistä jäsentä ovat

$$a_1 = x = 3,$$

$$a_2 = 3x+1 = 3 \cdot 3+1 = 10 \text{ ja}$$

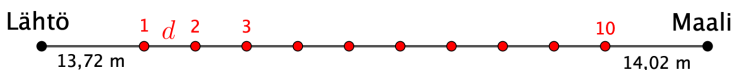
$$a_3 = x^2+8 = 3^2+8 = 17.$$

Vastaus

Kun $x = 2$, kolme ensimmäistä jäsentä ovat 2, 7 ja 12.

Kun $x = 3$, kolme ensimmäistä jäsentä ovat 3, 10 ja 17.

12.10



Matka ensimmäiselle aidalle on 13,72 m.

Merkitään kirjaimella d aitojen välistä etäisyyttä.

Matka 10. aidalle on $110 \text{ m} - 14,02 \text{ m} = 95,98 \text{ m}$.

Etäisyydet lähtöviivalta aidoille muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 13,72 \text{ (m)}$, erotusluku on d ja kymmenes jäsen on $a_{10} = 95,98 \text{ (m)}$.

Ilmaistaan jäsen $a_{10} = 95,98$ ensimmäisen jäsenen $a_1 = 13,72$ ja erotusluvun d avulla. Ratkaistaan erotusluku d .

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

$$95,98 = 13,72 + 9d$$

$$d = 9,14 \text{ (m)}$$

Sijoitetaan $a_{10} = 95,98$ ja $a_1 = 13,72$.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Aitojen välinen etäisyys on 9,14 m.

a) Lasketaan lukujonon 5. jäsen.

$$a_5 = 13,72 + 4 \cdot 9,14$$

$$= 50,28 \text{ (m)}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ missä}$$

$$a_1 = 13,72, \quad n = 5 \text{ ja } d = 9,14.$$

Matka lähtöviivalta viidennelle aidalle on 50,28 metriä.

b) Muodostetaan lukujonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}a_n &= 13,72 + (n-1) \cdot 9,14 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 13,72 \text{ ja } d = 9,14. \\ &= 9,14n + 4,58 \text{ (m)}\end{aligned}$$

Matka lähtöviivalta n :nnelle aidalle on $9,14n + 4,58$ metriä.

Vastaus

a) 50,28 metriä

b) $9,14n + 4,58$ metriä

12.11

a) Jonon erotusluku d saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 91 - 100 = -9$$

$$d = a_2 - a_1$$

b) Lasketaan jonon 17. jäsen.

$$a_{17} = 100 + 16 \cdot (-9)$$

$$= -44$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

missä $a_1 = 100$, $n = 17$ ja $d = -9$.

c) Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 100 + (n-1) \cdot (-9)$$

$$= 100 - 9n + 9$$

$$= 109 - 9n$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

missä $a_1 = 100$ ja $d = -9$.

Vastaus

a) $d = -9$

b) $a_{17} = -44$

c) $a_n = 109 - 9n$

12.12

Ensimmäisessä tuolirivissä on 24 tuolia.

Seuraavassa tuolirivissä on aina 3 tuolia enemmän.

Tuolien lukumäärät peräkkäisissä riveissä muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 24$ ja erotusluku $d = 3$.

Lasketaan jonon 15. jäsen.

$$\begin{aligned} a_{15} &= 24 + 14 \cdot 3 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 24, \ n=15 \text{ ja } d=3. \\ &= 66 \end{aligned}$$

15. tuolirivissä on 66 tuolia.

Vastaus

66 tuolia

12.13

Muodostetaan ensin jonon yleisen jäsenen lauseke.

Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 23 - 6 = 17$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 6 + (n-1) \cdot 17 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \\ & & \text{missä } a_1 &= 6 \text{ ja } d = 17. \\ &= 17n - 11 \end{aligned}$$

a) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{aligned} a_n &= 685 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 17n - 11. \\ 17n - 11 &= 685 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &\approx 40,9 & \text{Luku } 40,9 &\text{ ei kelpaa jäsenen järjestysluvuksi.} \end{aligned}$$

Ratkaisu $n \approx 40,9$ ei ole positiivinen kokonaisluku, joten luku 685 ei ole lukujonon jäsen.

b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 33\,921$$

$$\text{Sijoitetaan } a_n = 17n - 11.$$

$$17n - 11 = 33\,921$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n = 1996$$

Luku 1996 kelpaa jäsenen järjestysluvuksi.

Luku 33 921 on jonon 1996. jäsen: $a_{1996} = 17 \cdot 1996 - 11 = 33\,921$.

Vastaus

a) Ei ole.

b) On 1996. jäsen.

12.14

Muodostetaan ensin jonon yleisen jäsenen lauseke.

Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 1689 - 1700 = -11$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 1700 + (n-1) \cdot (-11) & a_n &= a_1 + (n-1)d, \\ & & \text{missä } a_1 &= 1700 \text{ ja } d = -11. \\ &= 1711 - 11n \end{aligned}$$

Muodostetaan seuraavaksi yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{aligned} a_n &= 0 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 1711 - 11n. \\ 1711 - 11n &= 0 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &\approx 155,5 \end{aligned}$$

Koska jonon seuraava jäsen saadaan aina edellisestä vähentämällä luku 11, jonon jäsenet pienenevät koko ajan. Täten viimeinen jonon jäsen, joka on positiivinen, on jäsen a_{155} .

Jonon 155 ensimmäistä jäsentä ovat positiivisia.

Vastaus

155 ensimmäistä jäsentä

12.15

Määritetään jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja erotusluku d .

Ilmaistaan jäsenet $a_3 = 6520$ ja $a_{40} = -2360$ ensimmäisen jäsenen a_1 ja erotusluvun d avulla.

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + 2d & \text{Sijoitetaan } a_3 = 6520. \\ 6520 &= a_1 + 6d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{40} &= a_1 + 39d & \text{Sijoitetaan } a_{40} = -2360. \\ -2360 &= a_1 + 39d \end{aligned}$$

Muodostetaan saaduista yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan a_1 ja d .

$$\begin{cases} 6520 = a_1 + 2d \\ -2360 = a_1 + 39d \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a_1 = 7000 \text{ ja } d = -240$$

Lasketaan jonon 20. jäsen.

$$\begin{aligned} a_{20} &= a_1 + 19d & \text{Sijoitetaan } a_1 = 7000 \text{ ja } d = -240. \\ &= 7000 + 19 \cdot (-240) \\ &= 2440 \end{aligned}$$

Vastaus

$$a_{20} = 2440$$

12.16

$$a_1 = 48 \text{ ja } d = -3$$

a) Jonon toinen jäsen $a_2 = 48 + (-3) = 45$.

Väittämä on tosi.

b) Esimerkiksi jonon jäsen $a_{20} = 48 + 19 \cdot (-3) = -9$ on negatiivinen.
Jonon kaikki jäsenet eivät siis ole positiivisia.

Väittämä on epätosi.

c) Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 48 + (n-1) \cdot (-3) & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 48 \text{ ja } d = -3. \\ &= 48 - 3n + 3 \\ &= 51 - 3n \end{aligned}$$

Väittämä on epätosi.

d) c-kohdan perusteella väittämä on tosi.

e) c-kohdan perusteella väittämä on tosi.

Vastaus

a) tosi **b)** epätosi **c)** epätosi **d)** tosi **e)** tosi

12.17

Matka 5. pylvälle on 885 m.

Matka 20. pylvälle on 2010 m.

Merkitään kirjaimella d pylväiden välistä etäisyyttä.

Etäisyydet risteyksestä pylvälle muodostavat aritmeettisen jonon, jonka 5. jäsen $a_5 = 885$ (m), 20. jäsen $a_{20} = 2010$ (m) ja erotusluku on d .

Ilmaistaan jäsenet $a_5 = 885$ ja $a_{20} = 2010$ ensimmäisen jäsenen a_1 ja erotusluvun d avulla.

$$a_5 = a_1 + 4d$$

Sijoitetaan $a_5 = 885$.

$$885 = a_1 + 4d$$

$$a_{20} = a_1 + 19d$$

Sijoitetaan $a_{20} = 2010$.

$$2010 = a_1 + 19d$$

Muodostetaan saaduista yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan a_1 ja d .

$$\begin{cases} 885 = a_1 + 4d \\ 2010 = a_1 + 19d \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a_1 = 585 \text{ ja } d = 75$$

Ensimmäisen pylvään etäisyys risteyksestä on 585 m ja pylväiden välinen etäisyys on 75 m.

Lasketaan lukujonon 45. jäsen.

$$a_{45} = 585 + 44 \cdot 75$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ missä}$$

$$a_1 = 585, n = 45 \text{ ja } d = 75.$$

$$= 3885 \text{ (m)}$$

Viimeisen pylvään etäisyys risteyksestä on 3885 m.

Vastaus

ensimmäinen pylväs 585 m ja viimeinen pylväs 3885 m

12.18

Aritmeettisen jonon seuraava jäsen saadaan edellisestä lisäämällä aina sama luku. Toisin sanoen aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten erotus on aina sama luku.

Muodostetaan kaksi yhtälöä.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$(2a + 1) - a = (a + b) - (2a + 1)$$

Yhtälöt voi muodostaa käyttämällä mitä tahansa kahta peräkkäistä jäsentä.

Sijoitetaan $a_1 = a$, $a_2 = 2a + 1$
ja $a_3 = a + b$.

$$a_2 - a_1 = a_4 - a_3$$

$$(2a + 1) - a = (7a - b) - (a + b)$$

Sijoitetaan $a_1 = a$, $a_2 = 2a + 1$,
 $a_3 = a + b$ ja $a_4 = 7a - b$.

Muodostetaan saaduista yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan a ja b .

$$\begin{cases} (2a + 1) - a = (a + b) - (2a + 1) \\ (2a + 1) - a = (7a - b) - (a + b) \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = 5 \text{ ja } b = 12$$

Vastaus

$$a = 5 \text{ ja } b = 12$$

12.19

Seitsemällä jaolliset positiiviset kokonaisluvut muodostavat lukujonon 7, 14, 21, 28, Lukujono on aritmeettinen jono, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 7$ ja erotusluku $d = 7$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 7 + (n-1) \cdot 7 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \\ & & \text{missä } a_1 &= 7 \text{ ja } d = 7. \\ &= 7n \end{aligned}$$

Selvitetään, kuinka mones lukujonon jäsen on ensimmäinen, joka on vähintään 4500.

$$\begin{aligned} a_n &= 4500 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 7n. \\ 7n &= 4500 & \text{Yhtälön voi ratkaista CAS-laskimella.} & \\ n &\approx 642,9 \end{aligned}$$

Koska jonon seuraava jäsen saadaan aina edellisestä lisäämällä luku 7, jonon jäsenet suurenevät koko ajan. Täten ensimmäinen jonon jäsen, joka on vähintään 4500, on jäsen a_{643} .

Selvitetään, kuinka mones lukujonon jäsen on viimeinen, joka on korkeintaan 7000.

$$a_n = 7000$$

Sijoitetaan $a_n = 7n$.

$$7n = 7000 \quad | :7$$

Yhtälön voi ratkaista CAS-laskimella.

$$n = 1000$$

Koska jonon jäsenet suurenevät koko ajan, viimeinen jonon jäsen, joka on korkeintaan 7000, on jäsen a_{1000} .

Jonon jäsenistä välillä $4500 \leq x \leq 7000$ ovat jäsenet $a_{643}, a_{644}, \dots, a_{1000}$.

Lukujen määrä on siis

$$1000 - 642$$

Lukujonon 642 ensimmäistä jäsentä ovat alle 4500.

$$= 358$$

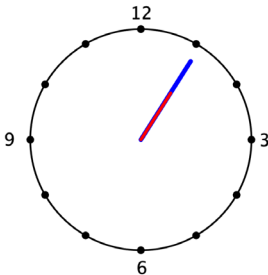
Välillä $4500 \leq x \leq 7000$ on 358 luvulla 7 jaollista kokonaislukua x .

Vastaus

358

12.20

- a) Appletin perusteella tuntiviisari ja minuuttiviisari ovat päällekkäin seuraavan kerran klo 13.05.



- b) Merkitään kirjaimella a_n tunteina aikaa, joka on kulunut, kun osoittimet ovat n :nnen kerran päällekkäin.

Kellon tuntiviisari kiertää kellotaulun 12 tunnissa. Samassa ajassa minuuttiviisari kiertää kellotaulun 12 kertaa. Koska viisarit liikkuvat vakionopeudella, on peräkkäisten päällekkäinoloaikojen erotus aina sama luku.

Luvut a_n muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 0$ ja erotusluku on d .

Kello 24.00 aikaa on kulunut 12 tuntia ja viisarit ovat päällekkäin 12. kerran. Siis $a_{12} = 12$. Ilmaistaan jäsen a_{12} ensimmäisen jäsenen a_1 ja erotusluvun d avulla. Ratkaistaan erotusluku d .

$$a_{12} = a_1 + 11d$$

$$12 = 0 + 11d$$

$$d = \frac{12}{11} = 1\frac{1}{11} \text{ (h)}$$

Sijoitetaan $a_{12} = 12$ ja $a_1 = 0$.

:11 Yhtälön voi ratkaista CAS-laskimella.

Muutetaan peräkkäisten päällekkäinoloaikojen välinen aika d tunneiksi, minuuteiksi ja sekunneiksi.

$$\begin{aligned}
 d &= 1\frac{1}{11} \text{ h} \\
 &= 1 \text{ h} + \frac{1}{11} \text{ h} && 1 \text{ h} = 60 \text{ min} \\
 &= 1 \text{ h} + \frac{1}{11} \cdot 60 \text{ min} \\
 &= 1 \text{ h} + \frac{60}{11} \text{ min} && \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11} \\
 &= 1 \text{ h} + 5\frac{5}{11} \text{ min} \\
 &= 1 \text{ h} + 5 \text{ min} + \frac{5}{11} \text{ min} && 1 \text{ min} = 60 \text{ s} \\
 &= 1 \text{ h} + 5 \text{ min} + \frac{5}{11} \cdot 60 \text{ s} \\
 &\approx 1 \text{ h} + 5 \text{ min} + 27 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Viisarit ovat seuraavan kerran päällekkäin, kun aikaa on kulunut 1 h 5 min 27 s eli klo 13.05.27.

Vastaus

a) 13.05 **b)** 13.05.27